SHEET 2 - رياضة II / [redacted] / أ. محمود كعوان

المحددات والمصفوفات



المحددات والمصفوفات

يبدو أن أول استخدام للمصفوفات كان في الكتاب الصيني "تسعة كتب في الحساب" قبيل بداية التاريخ الميلادي، بينما أول المحددات استخدمت من طرف الياباني *Seki Kōwa* سنة ١٦٨٣م..

وتعد المحددات والمصفوفات موضوعا رئيسيا في أحد فروع الرياضيات المسمى بالجبر الخطي.

و من تطبيقاتها : حل المعادلات الخطية وحل المسائل باستخدام الحاسوب.

١. تعريف المحددات :

تعريف ١: المحدد من الرتبة $n \times n$ هو عدد حقيقي نتحصل عليه من قائمة أعداد حقيقية، تسمى عناصره، ومرتّبة على شكل صفوف وأعمدة بحيث عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة ويساوي n ، وذلك باستخدام قواعد حسابية معينة.

يمكن الإشارة إلى أنّ قيمة المحددات 1×1 تساوي عنصرها..

مثال ١: المحددات التالية من الرتبة 2×2 ، 3×3 ، و 4×4 على الترتيب:

$$1)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad 2)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 6 & 3 \\ 8 & 7 & 4 \end{vmatrix} \qquad 3)\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

حساب المحددات 2×2 :

تعريف ٢: المحدد 2×2 هو حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي (النازل) ناقص حاصل ضرب عناصر القطر غير الرئيسي (الصاعد)، أي أنّ:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

مثال ٢: الحسب المحددات التالية:

$$1)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad 2)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$$

الحل:

$$1)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (2 \times 3) - (4 \times 1) = 6 - 4 = 2$$

$$2)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = (1 \times 0) - (5 \times -1) = 0 - (-5) = 5$$

حساب المحددات 3×3 :

تعريف ٣ : المحدد 3×3 هو مجموع حواصل ضرب عناصر الأقطار الرئيسية الثلاثة (النازلة) ناقص مجموع حواصل ضرب عناصر الأقطار غير الرئيسية الثلاثة (الصاعدة)، ونتحصل على هذه الأقطار بإضافة عمودين مماثلين للعمودين الأول والثاني على الترتيب، أي أنّ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

مثال ٣ : احسب المحددات التالية:

$$1)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 6 & 3 \\ 8 & 7 & 4 \end{vmatrix} \qquad 2)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

الحل:

$$1)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 6 & 3 \\ 8 & 7 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 6 & 3 \\ 8 & 7 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 8 & 7 \end{matrix}$$

$$= (1 \times 6 \times 4) + (3 \times 3 \times 8) + (9 \times 2 \times 7) - (8 \times 6 \times 9) - (7 \times 3 \times 1) - (4 \times 2 \times 3)$$

$$= 24 + 72 + 126 - 432 - 21 - 24 = -255$$

$$2)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 & 0 \\ 5 & 1 \\ 0 & -2 \end{matrix}$$

$$= (-1 \times 1 \times 4) + (0 \times -3 \times 0) + (2 \times 5 \times -2) - (0 \times 1 \times 2) - (-2 \times -3 \times -1) - (4 \times 5 \times 0)$$

$$= -4 + 0 - 20 - 0 - (-6) - 0 = -18$$

٢. بعض خواص المحددات:

قاعدة النقل: لا تتغير قيمة المحدد إذا حولنا الصفوف إلى أعمدة والأعمدة إلى صفوف.

مثال ٤: احسب المحددات التالية:

$$1)\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \qquad 2)\begin{vmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

الحل:

١) نستخدم نتيجة الفقرة ٢ من المثال ٢:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 5$$

٢) نستخدم نتيجة الفقرة ٢ من المثال ٣:

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -18$$

قاعدة الضرب في عدد: إذا ضربنا كل عنصر من عناصر صف واحد فقط أو عمود واحد فقط للمحدد بعدد حقيقي فإننا نضرب قيمة المحدد (الأصلي) بهذا العدد.

مثال ٥: احسب المحددات التالية:

$$1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad 2)\begin{vmatrix} 1 & -9 & 9 \\ 2 & -18 & 3 \\ 8 & -21 & 4 \end{vmatrix}$$

الحل:

١) نستخدم نتيجة الفقرة ١ من المثال ٢:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.5\times 2 & 0.5\times 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0.5\times\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0.5\times 2 = 1$$

٢) نستخدم نتيجة الفقرة ١ من المثال ٣:

$$\begin{vmatrix} 1 & -9 & 9 \\ 2 & -18 & 3 \\ 8 & -21 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3\times 3 & 9 \\ 2 & -3\times 6 & 3 \\ 8 & -3\times 7 & 4 \end{vmatrix} = -3\times\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 6 & 3 \\ 8 & 7 & 4 \end{vmatrix} = -3\times -255 = 765$$

قاعدة التبادل: إذا تبادل صفان بينهما أو عمودان بينهما فإن إشارة المحدد تتغير فقط.

مثال ٦: احسب المحددات التالية:

$$1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \qquad 2)\begin{vmatrix} 1 & -9 & 9 \\ 8 & -21 & 4 \\ 2 & -18 & 3 \end{vmatrix}$$

الحل:

١) نستخدم نتيجة الفقرة ١ من المثال ٥ بعد تبادل العمود الأول والثاني:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

٢) نستخدم نتيجة الفقرة ٢ من المثال ٥ بعد تبادل الصف الثاني والثالث:

$$\begin{vmatrix} 1 & -9 & 9 \\ 8 & -21 & 4 \\ 2 & -18 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -9 & 9 \\ 2 & -18 & 3 \\ 8 & -21 & 4 \end{vmatrix} = -765$$

قاعدة التماثل: إذا تماثل صفان أو عمودان فإن قيمة المحدد هي صفر.

مثال ٧: احسب المحددات التالية:

$$1)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \qquad 2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

الحل:

١) بما أنّ الصف الأول والثاني متماثلان إذن:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

٢) بما أنّ العمود الأول والثاني متماثلان إذن:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

٣. تعريف المصفوفات:

تعريف ٤: مصفوفة أعداد حقيقية من الرتبة $m \times n$ هي قائمة أعداد حقيقية، تسمى عناصرها، ومرتبة على شكل صفوف وأعمدة، بحيث عدد الصفوف يساوي m وعدد الأعمدة يساوي n.

يمكن الإشارة إلى أنّ المصفوفات 1×1 هي أعداد حقيقية.

مثال ٨: المصفوفات التالية من الرتبة 2×3، 3×2، 4×1، 1×5، و 3×3 على الترتيب:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 7 & 10 \\ 3 & 5 & 12 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 5 \\ 10 & 12 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0.5 \\ 2 \end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} -0.6 & 2 & 17 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 0.7 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

تساوي مصفوفتين:

تعريف ٥: تكون مصفوفتان من الرتبة نفسها متساويتين إذا تساوت عناصرهما (الموافقة) على الترتيب..

مثال ٩: نعتبر مصفوفات المثال ٨ والمصفوفتين التاليتين:

$$F=\begin{pmatrix} 3+2 & 2 & -1x3 \\ 1 & 0 & 0.7 \\ 2 & 2-6 & 0 \end{pmatrix},\quad G=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 0.7 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

A

$A \neq B$ لأنهما من رتبتين مختلفتين، وكذلك $E \neq G$ لأنه يوجد عنصران غير متساويين (الصف الثاني والعمود الثاني)، بينما $E = F$.

٤. عمليات على المصفوفات:

الجمع والطرح:

تعريف ٦: حاصل جمع (أو طرح) مصفوفتين من الرتبة نفسها هو مصفوفة من الرتبة نفسها، وكل عنصر من عناصرها هو مجموع (أو طرح) العنصرين الموافقين له من المصفوفتين.

مثال ١٠: إذا كان لدينا المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ -6 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

فاحسب ما يلي:

$$1)\ A+B \qquad 2)\ B-A$$

الحل:

$$1)\ A+B=\begin{pmatrix} 2-2 & 4+0 & 7+1 \\ -6+3 & 3+4 & -1+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$2)\ B-A=\begin{pmatrix} -2-2 & 0-4 & 1-7 \\ 3-(-6) & 4-3 & 7-(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -4 & -6 \\ 9 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

نظرية ١: جمع المصفوفات تبديلي وتجميعي.

مثال ١١: نعتبر مصفوفات المثال ١٠. احسب ما يلي:

$$1)\ B+A \qquad 2)\ B+(A+B) \qquad 3)\ B+B+A$$

الحل:

١) نستخدم نتيجة الفقرة ١ من المثال ٩ وبأن الجمع تبديلي:

$$B+A=A+B=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

٢) نستخدم نتيجة الفقرة ١ من هذا المثال وبأن الجمع تجميعي:

$$B+(A+B)=(B+A)+B=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 9 \\ 0 & 11 & 13 \end{pmatrix}$$

٣) نستخدم نتيجة الفقرة ٢ من هذا المثال وبأن الجمع تبديلي وتجميعي:

$$B+B+A=B+A+B=B+(A+B)=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 9 \\ 0 & 11 & 13 \end{pmatrix}$$

ضرب مصفوفة في عدد حقيقي أو القسمة عليه :

تعريف ٧ : ضرب (أو قسمة) مصفوفة في (أو على) عدد حقيقي هو مصفوفة من الرتبة نفسها، وكل عنصر من عناصرها هو حاصل ضرب (أو قسمة) العنصر الموافق له من المصفوفة (الأصلية) في (أو على) العدد الحقيقي.

مثال ١٢ : ليكن لدينا المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\\ 6 & 5\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}0.5 & 1\\ 0 & -2\\ 3 & 0.4\end{pmatrix}$$

فاحسب ما يلي:

$$1)\ 3A \qquad 2)\ -A+2B \qquad 3)\ \frac{B}{-2}$$

الحل:

$$1)\ 3A=3\times\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\\ 6 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times3 & 3\times0\\ 3\times1 & 3\times2\\ 3\times6 & 3\times5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 0\\ 3 & 6\\ 18 & 15\end{pmatrix}$$

$$2)\ -A+2B=-1\times\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\\ 6 & 5\end{pmatrix}+2\times\begin{pmatrix}0.5 & 1\\ 0 & -2\\ 3 & 0.4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ -1 & -2\\ -6 & -5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -4\\ 6 & 0.8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -1 & -6\\ 0 & -4.2\end{pmatrix}$$

$$3)\ \frac{B}{-2}=\frac{\begin{pmatrix}0.5 & 1\\ 0 & -2\\ 3 & 0.4\end{pmatrix}}{-2}=\begin{pmatrix}\frac{0.5}{-2} & \frac{1}{-2}\\ \frac{0}{-2} & \frac{-2}{-2}\\ \frac{3}{-2} & \frac{0.4}{-2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.25 & -0.5\\ 0 & 1\\ -1.5 & -0.2\end{pmatrix}$$

نظرية ٢ : ضرب مصفوفة في عدد حقيقي تبديلي وتجميعي (أي بالنسبة للضرب في عدد آخر).

مثال ١٣ : نعتبر مصفوفات المثال ١٢. احسب ما يلي:

$$1)\ A\times3 \qquad 2)\ 1.5(2A)$$

الحل:

١) نستخدم نتيجة الفقرة ١ من المثال ١٢ وبأنّ العملية تبديلية:

$$A\times 3=3A=\begin{pmatrix}9 & 0\\ 3 & 6\\ 18 & 15\end{pmatrix}$$

٢) نستخدم نتيجة الفقرة ١ من المثال ١٢ وبأنّ العملية تجميعية:

$$1.5(2A)=(1.5\times 2)A=3A=\begin{pmatrix}9 & 0\\ 3 & 6\\ 18 & 15\end{pmatrix}$$

ضرب صف في عمود:

تعريف ٨: حاصل ضرب صف في عمود له عدد العناصر نفسه هو مجموع حواصل ضرب كل عنصر من الصف في العنصر الموافق له من العمود، وهذا الضرب ليس تبديليا.

مثال ١٤: احسب ما يلي:

$$1)\ a=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 0.3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\1\\4\\10\end{pmatrix} \qquad 2)\ b=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 0.3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix}$$

الحل:

$$1)\ a=(1\text{x}-3)+(-2\text{x}1)+(0\text{x}4)+(0.3\text{x}10)=-3-2+0+3=-2$$

٢) لا يمكن حساب b لأنّ عدد عناصر الصف لا يساوي عدد عناصر العمود.

تجدر الإشارة إلى أنّه يمكن حساب ضرب العمود في الصف بعد التعريف اللاحق فقط.

ضرب مصفوفتين:

تعريف ٩: حاصل ضرب مصفوفة من الرتبة $m\times k$ في مصفوفة من الرتبة $k\times n$ (أي أنّ عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية) هو مصفوفة من الرتبة $m\times n$، وكل عنصر من عناصرها هو حاصل ضرب الصف الموافق له من المصفوفة الأولى في العمود الموافق له من المصفوفة الثانية.

مثال ١٥: ليكن لدينا المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}30 & -40 & 90\\ -25 & -80 & 100\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}10 & 15\\ 70 & 90\\ 120 & 110\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}1 & -2 & 30\\ 15 & 0 & -12\\ 23 & 3 & 6\end{pmatrix}$$

احسب ما يلي:

1) AB 2) BA 3) BC

الحل:

$$1)\ AB=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}30 & -40 & 90\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\70\\120\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}30 & -40 & 90\end{pmatrix}\begin{pmatrix}15\\90\\110\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}-25 & -80 & 100\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\70\\120\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-25 & -80 & 100\end{pmatrix}\begin{pmatrix}15\\90\\110\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8300 & 6750\\ 6150 & 3425\end{pmatrix}$$

$$2)\ BA=\begin{pmatrix} (10\ \ 15)\begin{pmatrix}30\\-25\end{pmatrix} & (10\ \ 15)\begin{pmatrix}-40\\-80\end{pmatrix} & (10\ \ 15)\begin{pmatrix}90\\100\end{pmatrix} \\ (70\ \ 90)\begin{pmatrix}30\\-25\end{pmatrix} & (70\ \ 90)\begin{pmatrix}-40\\-80\end{pmatrix} & (70\ \ 90)\begin{pmatrix}90\\100\end{pmatrix} \\ (120\ \ 110)\begin{pmatrix}30\\-25\end{pmatrix} & (120\ \ 110)\begin{pmatrix}-40\\-80\end{pmatrix} & (120\ \ 110)\begin{pmatrix}90\\100\end{pmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-75 & -1600 & 2400\\ -150 & -10000 & 15300\\ 850 & -13600 & 21800\end{pmatrix}$$

٣) لا يمكن حساب الضرب لأن عدد أعمدة المصفوفة الأولى هو ٢ بينما عدد صفوف الثانية هو ٣.

نظرية ٢: ضرب المصفوفات تجميعي ولكنه ليس تبديليا.

مثال ١٦: باستخدام نتائج الفقرتين ١ و ٢ من المثال ١٥ يمكن استنتاج أنّ:

$$AB \neq BA$$

مثال ١٧: احسب ما يلي وقارن مع الفقرة ١ من المثال ١٤:

$$A=\begin{pmatrix}-3\\1\\4\\10\end{pmatrix}(1\quad -2\quad 0\quad 0.3)$$

الحل:

$$A=\begin{pmatrix}-3\times 1 & -3\times -2 & -3\times 0 & -3\times 0.3\\ 1\times 1 & 1\times -2 & 1\times 0 & 1\times 0.3\\ 4\times 1 & 4\times -2 & 4\times 0 & 4\times 0.3\\ 10\times 1 & 10\times -2 & 10\times 0 & 10\times 0.3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 6 & 0 & -0.9\\ 1 & -2 & 0 & 0.3\\ 4 & -8 & 0 & 1.2\\ 10 & -20 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

ومنه نستنتج أنّ:

$$(1\quad -2\quad 0\quad 0.3)\begin{pmatrix}-3\\1\\4\\10\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}-3\\1\\4\\10\end{pmatrix}(1\quad -2\quad 0\quad 0.3)$$

مثال ١٨: ليكن لدينا المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\qquad B=(3\quad 0\quad 0.5)\qquad C=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$$

احسب ما يلي:

$$1)\ (AB)C \qquad 2)\ A(BC)$$

الحل:

$$1)\ (AB)C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -0.5 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}$$

٢) نستخدم نتيجة الفقرة ١ من هذا المثال وبأن العملية تجميعية:

$$A(BC) = (AB)C = \begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}$$

نظرية ٤: جمع المصفوفات توزيعي بالنسبة لضربهما، أي أنّ:

$$(A+B)C = AC + BC$$

$$A(B+C) = AB + AC$$

وهذا بالنسبة لثلاث مصفوفات A و B و C من الرتب المواتية لهذه العمليات.

منقول المصفوفة:

تعريف ١٠: منقول مصفوفة A من الرتبة $m \times n$ هو المصفوفة A^t من الرتبة $n \times m$، بحيث صفوف الثانية هي أعمدة الأولى وأعمدة الثانية هي صفوف الأولى.

مثال ١٩: احسب منقول كلا من مصفوفات المثال ١٨.

الحل:

$$A^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B^t = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} \qquad C^t = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

٥. مصفوفات خاصة :

المصفوفة المربعة :

تعريف ١١ : تكون المصفوفة A مربعة إذا كان عدد صفوفها يساوي عدد أعمدتها. في هذه الحالة، يمكن أن نتكلم عن محدد المصفوفة ونرمز له بالرمز $\det(A)$..

مثال ٢٠ : احسب محدد كلا من المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}-2&3\\1&1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&0&-3\\4&-2&1\\-2&0&1\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}0&1&4\\-5&3&0\\6&1&-3\end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix}-4&0&6\\0&1&-5\end{pmatrix}$$

الحل:

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1&-1\\1&0\end{vmatrix}=0-(-1)=1$$

$$\det(B)=\begin{vmatrix}-2&3\\1&1\end{vmatrix}=-2-3=-5$$

$$\det(C)=\begin{vmatrix}1&0&-3\\4&-2&1\\-2&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&-3\\4&-2&1\\-2&0&1\end{vmatrix}\begin{matrix}1&0\\4&-2\\-2&0\end{matrix}=-2+0+0-(-12)-0-0=10$$

$$\det(D)=\begin{vmatrix}0&1&4\\-5&3&0\\6&1&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&4\\-5&3&0\\6&1&-3\end{vmatrix}\begin{matrix}0&1\\-5&3\\6&1\end{matrix}=0+0-20-72-0-15=-107$$

بينما لا يمكن حساب $\det(E)$ لأن E ليست مصفوفة مربعة.

نظرية ٥ : محدد حاصل ضرب مصفوفتين مربعتين هو حاصل ضرب محدديهما.

مثال ٢١ : نعتبر مصفوفات المثال ٢٠. احسب المحددات التالية:

1) $\det(AB)$ 2) $\det(BA)$ 3) $\det(CD)$ 4) $\det(DC)$

الحل:

لا نحتاج إلى حساب ضرب المصفوفات لأن المطلوب هو حساب المحددات فقط. نستخدم نتائج المثال ٢٠ :

$$1)\ \det(AB)=\det(A)\times\det(B)=1\times -5=-5$$
$$2)\ \det(BA)=\det(B)\times\det(A)=-5\times 1=-5$$
$$3)\ \det(CD)=\det(C)\times\det(D)=10\times -107=-1070$$
$$4)\ \det(DC)=\det(D)\times\det(C)=-107\times 10=-1070$$

المصفوفة الشاذة:

تعريف ١٢: تكون المصفوفة المربعة شاذة إذا كان محددها يساوي صفرا.

مثال ٢٢: كل المصفوفات المربعة في المثال ٢٠ غير شاذة لأن محدداتها لا تساوي الصفر. بينما المصفوفة التالية شاذة لأن محددها يساوي الصفر:

$$F=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

المصفوفة القطرية:

تعريف ١٣: تكون المصفوفة المربعة قطرية إذا كانت كل عناصرها تساوي الصفر ما عدا عناصر القطر الرئيسي (النازل) التي قد تساوي الصفر أو لا.

مثال ٢٣: المصفوفات التالية قطرية:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

بينما المصفوفات التالية غير قطرية:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad G=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

نظرية ٦: محدد مصفوفة قطرية هو حاصل ضرب عناصر قطرها الرئيسي (النازل).

مثال ٢٤: احسب محددات المصفوفات القطرية الموجودة في المثال ٢٣.

الحل:

$$\det(A)=1\times 0=0$$
$$\det(B)=-2\times 1=-2$$
$$\det(C)=1\times -2\times 1=-2$$
$$\det(C)=0\times 3\times -3=0$$

مصفوفة الوحدة:

تعريف ١٤: مصفوفة الوحدة هي مصفوفة قطرية، وكل عناصر قطرها الرئيسي تساوي ١.

يرمز لها بالرمز I_n إذا كانت من الرتبة $n \times n$ ، أو بالرمز I إذا لم يكن هناك التباس في رتبتها.

مثال ٢٤:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

نظرية ٧: مصفوفة الوحدة عنصر حيادي في ضرب المصفوفات.

مثال ٢٥: احسب كلا مما يلي:

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad 2)\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

الحل:

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2)\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = A$$

مصفوفة المعاملات المرفقة:

تعريف ١٥: المعامل المرفق بالعنصر a من مصفوفة مربعة A هو محدد المصفوفة التي نتحصل عليها بحذف الصف والعمود الموافقين للعنصر a من المصفوفة A ، مضروبا في الإشارة المناسبة لموقع a (في المصفوفة A) كما هو موضح أدناه بالنسبة للمصفوفات 2×2 و 3×3 و 4×4 (وقس على ذلك):

$$\begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

في هذه الحالة، يمكن تشكيل مصفوفة المعاملات المرفقة بالترتيب الموافق لعناصرها في المصفوفة الأصلية. يرمز لها بالرمز $cofA$ ..

مثال ٢٦: احسب مصفوفة المعاملات المرفقة لكل مما يلي:

$$1)\ A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix} \qquad 2)\ B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ -1 & 4 & 2\\ 2 & 3 & -2\end{pmatrix}$$

الحل:

$$1)\ cofA=\begin{pmatrix}+0 & -2\\ -(-1) & +3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$2)\ cofB=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}4 & 2\\ 3 & -2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & -2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 2 & 3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}3 & 2\\ 3 & -2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 3\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 4\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-14 & 2 & -11\\ 12 & -6 & 3\\ -2 & -4 & 7\end{pmatrix}$$

المصفوفة القرينة:

تعريف ١٦: المصفوفة القرينة لمصفوفة مربعة A هي منقول مصفوفة المعاملات المرفقة.
يرمز لها بالرمز $adjA$.

مثال ٢٧: احسب المصفوفة القرينة لكل من مصفوفات المثال ٢٦.

الحل:

$$1)\ adjA=(cofA)'=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$$

$$2)\ adjB=(cofB)'=\begin{pmatrix}-14 & 12 & -2\\ 2 & -6 & -4\\ -11 & 3 & 7\end{pmatrix}$$

٦. مقلوب المصفوفة :

تعريف ١٧: مقلوب مصفوفة مربعة A هو المصفوفة المربعة A^{-1} - إن وجدت – بحيث حاصل ضربهما هو مصفوفة الوحدة، أي أنّ:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

نظرية ٨: إذا كان محدد مصفوفة مربعة A لا يساوي صفرا فإنّها تقبل مقلوبا وحيدا هو حاصل قسمة مصفوفتها القرينة على محددها، أي أنّ:

$$A^{-1} = \frac{adjA}{\det(A)}$$

مثال ٢٨: احسب مقلوب كلا من مصفوفات المثال ٢٦.

الحل:

١) يجب أن نحسب أولا محدد المصفوفة:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0-(-2) = 2 \neq 0$$

بما أن المحدد لا يساوي الصفر فإن المصفوفة تقبل مقلوبا نحسبه باستخدام نتائج الفقرة ١ من المثال ٢٦:

$$A^{-1} = \frac{adjA}{\det(A)} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ -1 & 1.5 \end{pmatrix}$$

٢) يجب أن نحسب أولا محدد المصفوفة:

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{matrix} = -8+12-6-16-6-6 = -30 \neq 0$$

بما أن المحدد لا يساوي الصفر فإن المصفوفة تقبل مقلوبا نحسبه باستخدام نتائج الفقرة ٢ من المثال ٢٦:

$$B^{-1} = \frac{adjB}{\det(B)} = \frac{\begin{pmatrix} -14 & 12 & -2 \\ 2 & -6 & -4 \\ -11 & 3 & 7 \end{pmatrix}}{-30} = \begin{pmatrix} \frac{7}{15} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{15} \\ -\frac{1}{15} & \frac{1}{5} & \frac{2}{15} \\ \frac{11}{30} & -\frac{1}{10} & -\frac{7}{30} \end{pmatrix}$$

مثال ٢٩: احسب مقلوب المصفوفات التالية:

$$1)\ A=\begin{pmatrix}1&0&3\\-2&5&-1\\0&4&1\end{pmatrix}\qquad 2)\ B=\begin{pmatrix}1&-2&10\\0&2&5\\0&0&0\end{pmatrix}\qquad 3)\ C=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\qquad 4)\ D=\begin{pmatrix}2&-6\\1&-3\end{pmatrix}$$

الحل:

١) الخطوة الأولى: نحسب المحدد:

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1&0&3\\-2&5&-1\\0&4&1\end{vmatrix}=\left|\begin{matrix}1&0&3\\-2&5&-1\\0&4&1\end{matrix}\right|\begin{matrix}1&0\\-2&5\\0&4\end{matrix}=5+0-24-0-(-4)-0=-15\neq 0$$

بما أن المحدد لا يساوي الصفر فإن المصفوفة تقبل مقلوبا ونستأنف في الحساب.

الخطوة الثانية: نحسب المعاملات المرافقة ومصفوفتها:

$$cofA=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}5&-1\\4&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}-2&-1\\0&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}-2&5\\0&4\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}0&3\\4&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&3\\0&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\0&4\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}0&3\\5&-1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&3\\-2&-1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&0\\-2&5\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&2&-8\\12&1&-4\\-15&-5&5\end{pmatrix}$$

الخطوة الثالثة: نحسب المصفوفة القرينة:

$$adjA=(cofA)^t=\begin{pmatrix}9&12&-15\\2&1&-5\\-8&-4&5\end{pmatrix}$$

الخطوة الرابعة: نحسب المقلوب:

$$A^{-1}=\frac{adjA}{\det(A)}=\frac{\begin{pmatrix}9&12&-15\\2&1&-5\\-8&-4&5\end{pmatrix}}{-15}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{5}&-\frac{4}{5}&1\\-\frac{2}{15}&-\frac{1}{15}&\frac{1}{3}\\\frac{8}{15}&\frac{4}{15}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

٢) الخطوة الأولى: نحسب المحدد:

$$\det(B)=\begin{vmatrix}1&-2&10\\0&2&5\\0&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2&10\\0&2&5\\0&0&0\end{vmatrix}\begin{matrix}1&-2\\0&2\\0&0\end{matrix}=0+0+0-0-0-0=0$$

بما أن المحدد يساوي الصفر فإن المصفوفة لا تقبل مقلوبا ونتوقف عن الحساب.

٣) الخطوة الأولى: نحسب المحدد:

$$\det(C)=\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=4-6=-2\neq 0$$

بما أن المحدد لا يساوي الصفر فإن المصفوفة تقبل مقلوبا ونستأنف في الحساب.

الخطوة الثانية: نحسب المعاملات المرافقة ومصفوفتها:

$$cofC=\begin{pmatrix}+4&-3\\-2&+1\end{pmatrix}$$

الخطوة الثالثة: نحسب المصفوفة القرينة:

$$adjC=(cofC)'=\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix}$$

الخطوة الرابعة: نحسب المقلوب:

$$C^{-1}=\frac{adjC}{\det(C)}=\frac{\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix}}{-2}=\begin{pmatrix}-2&1\\1.5&-0.5\end{pmatrix}$$

٤) الخطوة الأولى: نحسب المحدد:

$$\det(D)=\begin{vmatrix}2&-6\\1&-3\end{vmatrix}=-6-(-6)=0$$

بما أن المحدد يساوي الصفر فإن المصفوفة لا تقبل مقلوبا ونتوقف عن الحساب.

مقلوب مصفوفة 2×2:

نظرية 9: إذا كانت a و b و c و d أربعة أعداد حقيقية بحيث $ad-bc\neq 0$ لا يساوي الصفر فإنّ:

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{-1}=\frac{\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}}{ad-bc}=\frac{\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}}{\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}}$$

أي أنّ هذا القانون يسمح لنا بحساب مقلوب مصفوفة 2×2 عندما يكون محددها لا يساوي الصفر.

مثال ٣٠: أعد حساب مقلوب المصفوفات 2×2 للمثال ٢٨ و ٢٩ باستخدام النظرية 9.

الحل:

١) محدد المصفوفة لا يساوي الصفر إذن:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -(-1) \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ -1 & 1.5 \end{pmatrix}$$

٢) محدد المصفوفة لا يساوي الصفر إذن:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}{-2} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

٣) محدد المصفوفة يساوي الصفر إذن لا يوجد مقلوبا.

$$\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -6-(-6) = 0$$

تمارين

تمرين ١: احسب كلا من المحددات التالية:

$$1)\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & 5\end{vmatrix}\qquad 2)\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & -1\end{vmatrix}\qquad 3)\begin{vmatrix}0 & 7\\ 3 & 6\end{vmatrix}$$

$$4)\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 0\end{vmatrix}\qquad 5)\begin{vmatrix}-1 & 2 & 0\\ -3 & 1 & 1\\ -2 & 2 & 5\end{vmatrix}\qquad 6)\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

تمرين ٢: استخدم التمرين ١ وخواص المحددات لحساب ما يلي:

$$1)\begin{vmatrix}3 & 1 & 7\\ 2 & -1 & 14\\ 5 & -10 & 35\end{vmatrix}\qquad 2)\begin{vmatrix}-2 & 2 & 5\\ -3 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 0\end{vmatrix}\qquad 3)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 4 & -1\end{vmatrix}\qquad 4)\begin{vmatrix}1 & 1 & 5\\ 3 & 3 & 0\\ -2 & -2 & 6\end{vmatrix}$$

تمرين ٣: ليكن لدينا المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 4\\ 2 & 6 & -5\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}10 & -2 & -6\\ 3 & 7 & 1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}0.5 & 12 & -2\\ 0 & 5 & 3\end{pmatrix}$$

احسب ما يلي:

$$1)\ A-2B+C\qquad 2)\ -2C+3A\qquad 3)\ B-A+3C$$

تمرين ٤: احسب حاصل ضرب المصفوفات التالية:

$$1)\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 4 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 0\\ 2 & -2\end{pmatrix}\qquad 2)\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -2 & 3 & 5\\ -1 & 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\\ -3 & -2\end{pmatrix}$$

$$3)\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & -4\\ 0 & 3 & 7 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\\ 4 & -1\\ 3 & 7\end{pmatrix}\qquad 4)\begin{pmatrix}2 & -3 & 4\\ -1 & 4 & -2\\ 1 & 0 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ 2 & 5 & -3\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix}$$

تمرين ٥: احسب مقلوب كل مصفوفة مما يلي:

$$1)\ A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 4 & -6\end{pmatrix}\quad 2)\ B=\begin{pmatrix}5 & -10\\ -1 & 2\end{pmatrix}\quad 3)\ C=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ -5 & 10 & 0\\ -3 & 14 & 0\end{pmatrix}$$

$$4)\ D=\begin{pmatrix}1 & 5 & -3\\ 0 & -2 & 1\\ 4 & 3 & 0\end{pmatrix}\quad 5)\ E=\begin{pmatrix}1 & 10 & 9 & 8\\ 2 & 11 & 12 & 7\\ 3 & 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$$

تمرين ٦: لتكن لدينا المصفوفة التالية:

$$M=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}6 & 12\\ 12 & -6\end{pmatrix}$$

احسب ما يلي:

$$1)\ \det(M)\qquad 2)\ M^2=MM\qquad 3)\ M^3=MMM$$

تمرين ٧: لتكن لدينا المصفوفات التلية:

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}5 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}-5 & 9\\ 6 & -6\end{pmatrix}$$

اوجد المصفوفات P و Q و R بحيث:

$$1)\ P=2A+B^2\qquad 2)\ AQ+BQ=I\qquad 3)\ RA=C$$

تمرين ٨: احسب محدد المصفوفة التالية:

$$M=\begin{pmatrix}k & 2k-3\\ 2 & k-1\end{pmatrix}$$

اوجد قيم k التي من أجلها تكون المصفوفة شاذة

تمرين ٩: احسب مقلوب المصفوفة التالية:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 3\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

.احسب المصفوفة التالية:

$$B=A^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}A$$

SHEET 3 رياضة II / أ. محمود كصوابر

المعادلات الخطية

المعادلات الخطية

درس المصريون والبابليون المعادلات الخطية منذ الألفية الثانية قبل بداية التاريخ الميلادي. ولكن الذي أسس لهذا الفن هو محمّد الخوارزمي في كتابه "الجبر والمقابلة" في نهاية القرن الثاني وبداية القرن الثالث الهجري (حوالي سنة ٨٢٥م) والذي يعتبر المؤسس لأحد فروع الرياضيات المسمى بالجبر. وكان الحافز لكتابة هذا الكتاب هو حل مسائل الفرائض أو المواريث بطريقة رياضية.

وتكمن أهمية المعادلات الخطية في إمكانية صياغة كثير من المسائل التطبيقية على شكل معادلات خطية.أو على شكل معادلات يمكن تقريبها بمعادلات خطية.

١. تعريف المعادلات الخطية :

تعريف ١ : تعبير خطي لمتغيرات ما هو مجموع حواصل ضرب هذه المتغيرات في أعداد حقيقية.

مثال ١ : هذه تعابير خطية للمتغيرات x و y و z الموجودة فيها :

1) $-x+2.5y+3x$

2) $y+\sqrt{3}\,x-2y+z$

3) $2x-y+3z$

وهذه تعابير غير خطية للمتغيرات x و y و z الموجودة فيها :

$x+xy-z$

x^2+x+1

$\sqrt{x}+y+z$

تعريف ٢ : معادلة خطية لمجاهيل معينة هو معادلة تحتوي على تعابير خطية لهذه المجاهيل وثوابت فقط.

مثال ٢ : هذه معادلات خطية للمجاهيل x و y و z الموجودة فيها :

$$-x+2.5y+3x-6=z-2y+3$$

$$2x-y+3z=-2$$

$$x+3.5y=6$$

وهذه معادلات غير خطية للمجاهيل x و y و z الموجودة فيها :

$$x+xy-z=0$$

$$x^2+x+1=3$$

$$\sqrt{x}+y+z=-y+z+10$$

تعريف ٣: جملة معادلات خطية (او نظام خطي) هو مجموعة من المعادلات الخطية مأخوذة في نفس الوقت.
لا يحتاج إلى استخدام كلمة جملة عندما تكون لدينا معادلة واحدة فقط.

مثال ٣: هذه جملة ٤ معادلات خطية للمجاهيل x و y و z:

$$-x+3y+2z=2$$
$$3x-6y+z=-3$$
$$2x+y-5z=10$$
$$x \qquad +3z=0$$

تعريف ٤: حل جملة معادلات خطية هو ايجاد كل القيم الممكنة للمجاهيل بحيث تتحقق كل المعادلات المعتبرة. وهذا الحل له ثلاث حالات فقط:

الحالة الأولى: جملة المعادلات الخطية تقبل حلا وحيدا، وذلك عندما يكون لكل مجهول قيمة واحدة فقط تحقق في مجملها كل المعادلات المعتبرة.

الحالة الثانية: جملة المعادلات الخطية مستحيلة الحل، وذلك عندما لا توجد قيمة لكل مجهول تحقق بمجملها كل المعادلات المعتبرة.

الحالة الثالثة: جملة المعادلات الخطية لها عدد لانهائي من الحلول، وذلك عندما يوجد عدد لانهائي من القيم لمجهول واحد على الأقل وقيم للمجاهيل الأخرى تحقق بمجملها كل المعادلات المعتبرة (أي عندما لا تكون الحالتين الأوليين).

٢. المعادلات الخطية ذات مجهول واحد:

قد مرت علينا هذه المعادلات في وحدة كثيرات الحدود ولكن في حلة خاصة وسندرس هنا حالتها العامة.

مثال ٤: حل كل من المعادلات الخطية التالية:

$1) -x+3=2x-6 \qquad 2)\ 3.5x+4=7x-3-3.5x \qquad 3)\ 2(3-x)=-2x+6$

الحل:

١) الخطوة الأولى: نضع المجهول في طرف والثوابت في طرف آخر:

$$-x-2x=-6-3$$

الخطوة الثانية: نبسّط الطرفين:

$$-3x=-9$$

الخطوة الثالثة: نستنتج حل المعادلة: المعادلة لها حل وحيد هو:

$$x=\frac{-9}{-3}=3$$

٢) الخطوة الأولى:

$$3.5x - 7x + 3.5x = -3 - 4$$

الخطوة الثانية:

$$0 = -7$$

الخطوة الثالثة: إذن المعادلة مستحيلة الحل.

٣) الخطوة الأولى:

$$6 - 2x = -2x + 6$$
$$-2x + 2x = 6 - 6$$

الخطوة الثانية:

$$0 = 0$$

الخطوة الثالثة: إذن المعادلة تقبل عدد لا نهائي من الحلول.

٣. جملة معادلتين خطيتين ذات مجهولين:

الحل بطريقة التعويض:

الخطوة الأولى: نوجد عبارة أحد المجهولين بدلالة الآخر في إحدى المعادلتين.

الخطوة الثانية: نعوض عن هذا المجهول في المعادلة الأخرى.فنتحصل على معادلة خطية ذات مجهول واحد.

الخطوة الثالثة: نحل المعادلة المتحصل عليها منفردة.

الخطوة الرابعة: ثلاث حالات:

الحالة الأولى: إذا كان لهذه المعادلة حلاً وحيداً فإن للجملة حل وحيد نتحصل عليه بالتعويض عن المجهول الثاني في عبارة المجهول الأول.

الحلة الثانية: إذا كانت هذه المعادلة مستحيلة الحل فإن الجملة مستحيلة الحل.

الحالة الثالثة: إذا كان لهذه المعادلة عدد لا نهائي من الحلول فإن للجملة عدد لا نهائي من الحلول.

مثال ٥: حل كلا من جمل المعادلات الخطية التالية:

$$1)\ -2x + y = 5 \quad 3x - 4y = -25 \qquad 2)\ -2x + y = 5 \quad x - 0.5y = 2 \qquad 3)\ -2x + y = 5 \quad x - 0.5y = -2.5$$

الحل:

١) الخطوة الأولى: نوجد عبارة y بدلالة x من المعادلة الأولى:

$$y = 5 + 2x$$

الخطوة الثانية: نعوض في المعادلة الثانية:

$$3x-4(5+2x)=-25$$

الخطوة الثالثة: نحل المعادلة المتحصل عليها:

$$3x-20-8x=-25$$

$$3x-8x=-25+20$$

$$-5x=-5$$

$$x=\frac{-5}{-5}=1$$

الخطوة الرابعة: تحصلنا على حل وحيد في الخطوة الثالثة إذن للجملة حل وحيد نتحصل عليه بالتعويض:

$$y=5+2x$$

$$y=5+(2\times 1)=7$$

خلاصة: حل الجملة هو:

$$x=1 \qquad y=7$$

٢) الخطوة الأولى: نوجد عبارة y بدلالة x من المعادلة الأولى:

$$y=5+2x$$

الخطوة الثانية: نعوض في المعادلة الثانية:

$$x-0.5(5+2x)=2$$

الخطوة الثالثة: نحل المعادلة،المتحصل عليها:

$$x-2.5-x=2$$

$$x-x=2+2.5$$

$$0=4.5$$

الخطوة الرابعة: المعادلة مستحيلة الحل إذن الجملة مستحيلة الحل.

٣) الخطوة الأولى: نوجد عبارة y بدلالة x من المعادلة الأولى:

$$y=5+2x$$

الخطوة الثانية: نعوض في المعادلة الثانية:

$$x-0.5(5+2x)=-2.5$$

الخطوة الثالثة: نحل المعادلة المتحصل عليها:

$$x-2.5-x=-2.5$$

$$x-x=-2.5+2.5$$

$$0=0$$

الخطوة الرابعة: للمعادلة عدد لانهائي من الحلول إذن للجملة عدد لانهائي من الحلول.

الحل بطريقة كرامير:

تعريف ٥: ليكن لدينا جملة معادلتين خطيتين ذات مجهولين x و y على الشكل التالي:

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

بحيث أن المعاملات a_1 و a_2 و b_1 و b_2 والثوابت c_1 و c_2 هي أعداد حقيقية.

محدد الجملة D هو المحدد 2×2 بحيث كل عمود فيه متكون من معاملات مجهول واحد وكل صف متكون من معاملات المجاهيل في معادلة واحدة، أي أن:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

محدد مجهول ما هو المحدد 2×2 بحيث نستبدل عمود معاملات المجهول بعمود الثوابت في محدد الجملة، أي أن:

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 b_2 - c_2 b_1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1$$

نظرية ١: حل جملة المعادلتين الخطيتين ذات المجهولين للتعريف السابق له ثلاث حالات فقط هي:

الحالة الأولى: إذا كان محدد الجملة لا يساوي الصفر فإن للجملة حل وحيد هو:

$$x = \frac{D_x}{D} \qquad y = \frac{D_y}{D}$$

الحالة الثانية: إذا كان محدد الجملة يساوي الصفر وكان واحد (على الأقل) من محددات المجاهيل لا يساوي الصفر فإن الجملة مستحيلة الحل.

الحالة الثالثة: إذا كان محدد الجملة يساوي الصفر وكان كل محدد من محددات المجاهيل يساوي الصفر فإن للجملة عدد لانهائي من الحلول.

مثال ٦: أعد حل جمل المعادلات الخطية للمثال ٥ بطريقة كرامير.

الحل:

١) نحسب محدد الجملة:

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5 \neq 0$$

نحسب محددات المجاهيل:

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -25 & -4 \end{vmatrix} = -20-(-25) = 5$$

$$D_y = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -25 \end{vmatrix} = 50-15 = 35$$

بما أن محدد الجملة لا يساوي الصفر إذن للجملة حل وحيد هو:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{5}{5} = 1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{35}{5} = 7$$

٢) نحسب محدد الجملة:

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{vmatrix} = 1-1 = 0$$

نحسب محددات المجاهيل:

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -0.5 \end{vmatrix} = -2.5-2 = -4.5 \neq 0$$

بما أن محدد الجملة يساوي الصفر ومحدد x لا يساوي الصفر إذن الجملة مستحيلة الحل.

٣) نحسب محدد الجملة:

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{vmatrix} = 1-1 = 0$$

نحسب محددات المجاهيل:

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2.5 & -0.5 \end{vmatrix} = -2.5-(-2.5) = 0$$

$$D_y = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2.5 \end{vmatrix} = 5-5 = 0$$

بما أن محدد الجملة يساوي الصفر ومحددات المجاهيل تساوي الصفر إذن للجملة عدد لانهائي من الحلول.

مثال ٧: حل جمل المعادلات الخطية التالية:

3) $2x+8y=4$, $x+4y=14$ 2) $3x+2y=12$, $5x-3y=1$ 1) $2x+3y=4$, $x-y=-3$

الحل:

$$1)\ D=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2-3=-5\neq 0$$

$$D_x=\begin{vmatrix}4 & 3\\ -3 & -1\end{vmatrix}=-4-(-9)=5$$

$$D_y=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-6-4=-10$$

إذن للجملة حل وحيد هو:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{5}{-5}=-1$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{-10}{-5}=2$$

$$2)\ D=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 5 & -3\end{vmatrix}=-9-10=-19\neq 0$$

$$D_x=\begin{vmatrix}12 & 2\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-36-2=-38$$

$$D_y=\begin{vmatrix}3 & 12\\ 5 & 1\end{vmatrix}=3-60=-57$$

إذن للجملة حل وحيد هو:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-38}{-19}=2$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{-57}{-19}=3$$

$$3)\ D=\begin{vmatrix}2 & 8\\ 1 & 4\end{vmatrix}=8-8=0$$

$$D_x=\begin{vmatrix}4 & 8\\ 14 & 4\end{vmatrix}=16-112=-96\neq 0$$

إذن الجملة مستحيلة الحل.

٤. جمل المعادلات الخطية ذات ثلاثة مجاهيل:

رغم أنه يمكن تعميم طريقة التعويض إلى هذه الحالة إلا أننا سنكتفي بطريقة كرامير وذلك لسهولتها.

تعريف ٦: ليكن لدينا جملة ٣ معادلات خطية ذات ٣ مجاهيل x و y و z على الشكل التالي:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3$$

بحيث أن المعاملات a_1 و a_2 و a_3 و b_1 و b_2 و b_3 و c_1 و c_2 و c_3 والثوابت d_1 و d_2 و d_3 هي أعداد حقيقية.

محدد الجملة D هو المحدد 3×3 بحيث كل عمود فيه متكون من معاملات مجهول واحد وكل صف متكون من معاملات المجاهيل في معادلة واحدة، أي أن:

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

محدد مجهول ما هو المحدد 3×3 بحيث نستبدل عمود معاملات المجهول بعمود الثوابت في محدد الجملة، أي أن:

$$D_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

نظرية ٢: حل جملة المعادلات الخطية ذات ٣ مجاهيل للتعريف السابق له ثلاث حالات فقط هي:

الحالة الأولى: إذا كان محدد الجملة لا يساوي الصفر فإن للجملة حل وحيد هو:

$$x=\frac{D_x}{D} \qquad y=\frac{D_y}{D} \qquad z=\frac{D_z}{D}$$

الحالة الثانية: إذا كان محدد الجملة يساوي الصفر وكان واحد (على الأقل) من محددات المجاهيل لا يساوي الصفر فإن الجملة مستحيلة الحل.

الحالة الثالثة: إذا كان محدد الجملة يساوي الصفر وكان كل محدد من محددات المجاهيل يساوي الصفر فإن للجملة عدد لانهائي من الحلول.

مثال ٨: حل جمل المعادلات التالية:

1) $x+y+z=6$
$2x+3y+z=11$
$3x+2y+2z=13$

2) $x+y+z=6$
$2x+3y+z=11$
$-x-2y\ \ =4$

3) $x+y+z=6$
$2x+3y+z=11$
$-x-2y\ \ =-5$

الحل:

$$1)\ D=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&1\\3&2&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&1\\3&2&2\end{vmatrix}\begin{matrix}1&1\\2&3\\3&2\end{matrix}=6+3+4-9-2-4=-2\neq 0$$

$$D_x=\begin{vmatrix}6&1&1\\11&3&1\\13&2&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6&1&1\\11&3&1\\13&2&2\end{vmatrix}\begin{matrix}6&1\\11&3\\13&2\end{matrix}=36+13+22-39-12-22=-2$$

$$D_y=\begin{vmatrix}1&6&1\\2&11&1\\3&13&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&6&1\\2&11&1\\3&13&2\end{vmatrix}\begin{matrix}1&6\\2&11\\3&13\end{matrix}=22+18+26-33-13-24=-4$$

$$D_z=\begin{vmatrix}1&1&6\\2&3&11\\3&2&13\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&6\\2&3&11\\3&2&13\end{vmatrix}\begin{matrix}1&1\\2&3\\3&2\end{matrix}=39+33+24-54-22-26=-6$$

إذن للجملة حل وحيد (لأن $D\neq 0$) هو:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-2}{-2}=1$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{-4}{-2}=2$$

$$z=\frac{D_z}{D}=\frac{-6}{-2}=3$$

$$2)\ D=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&1\\-1&-2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&1\\-1&-2&0\end{vmatrix}\begin{matrix}1&1\\2&3\\-1&-2\end{matrix}=0-1-4-(-3)-(-2)-0=0$$

$$D_x=\begin{vmatrix}6&1&1\\11&3&1\\4&-2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6&1&1\\11&3&1\\4&-2&0\end{vmatrix}\begin{matrix}6&1\\11&3\\4&-2\end{matrix}=0+4-22-12-(-12)-0=-18\neq 0$$

إذن الجملة مستحيلة الحل (لأن $D_x \neq 0$ $D=0$).

$$3)\ D=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&1\\-1&-2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&1\\-1&-2&0\end{vmatrix}\begin{matrix}1&1\\2&3\\-1&-2\end{matrix}=0-1-4-(-3)-(-2)-0=0$$

$$D_x=\begin{vmatrix}6&1&1\\11&3&1\\-5&-2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6&1&1\\11&3&1\\-5&-2&0\end{vmatrix}\begin{matrix}6&1\\11&3\\-5&-2\end{matrix}=0-5-22-(-15)-(-12)-0=0$$

$$D_y=\begin{vmatrix}1&6&1\\2&11&1\\-1&-5&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&6&1\\2&11&1\\-1&-5&0\end{vmatrix}\begin{matrix}1&6\\2&11\\-1&-5\end{matrix}=0-6-10-(-11)-(-5)-0=0$$

$$D_z=\begin{vmatrix}1&1&6\\2&3&11\\-1&-2&-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&6\\2&3&11\\-1&-2&-5\end{vmatrix}\begin{matrix}1&1\\2&3\\-1&-2\end{matrix}=-15-11-24-(-18)-(-22)-(-10)=0$$

إذن للجملة عدد لانهائي من الحلول (لأن $D=D_x=D_y=D_z=0$).

٥. حل المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات:

يمكن أن نكتب أية جملة معادلات خطية على شكل معادلة مصفوفات، وذلك على الشكل التالي:

$$AU=C$$

بحيث A هي مصفوفة معاملات المجاهيل و U هي مصفوفة متكونة من عمود واحد عناصرها هي المجاهيل و C هي مصفوفة متكونة من عمود واحد عناصرها هي الثوابت

مثال ٩: أعد كتابة جمل المعادلات الخطية للمثال ٥ باستخدام المصفوفات.

الحل:

$$1)\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ -25\end{pmatrix}\qquad 2)\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 2\end{pmatrix}\qquad 3)\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ -2.5\end{pmatrix}$$

مثال ١٠: أعد كتابة جمل المعادلات الخطية للمثال ٨ باستخدام المصفوفات.

الحل:

$$1)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\ 11\\ 13\end{pmatrix}\qquad 2)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ -1 & -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\ 11\\ 4\end{pmatrix}\qquad 3)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ -1 & -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\ 11\\ -5\end{pmatrix}$$

نظرية ٢: نعتبر جملة معادلات خطية مكتوبة باستخدام المصفوفات على الشكل التالي:

$$AU=C$$

بحيث مصفوفة المعاملات A تكون مربعة، أي أن عدد المجاهيل يساوي عدد المعادلات.

إذا كان محدد المصفوفة A، أي محدد الجملة، لا يساوي الصفر فإن للجملة حلا وحيدا هو:

$$U=A^{-1}C$$

مثال ١١: أعد حل جمل المعادلات الخطية للمثال ٩ باستخدام المصفوفات:

الحل:

١) الخطوة الأولى: نحسب محدد الجملة:

$$\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 3 & -4\end{vmatrix}=8-3=5\neq 0$$

بما أن المحدد لا يساوي الصفر فإن للجملة حلا وحيدا ونستأنف في الحل.

الخطوة الثانية: نحسب مقلوب مصفوفة المعاملات:

$$\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & -4\end{pmatrix}^{-1}=\frac{\begin{pmatrix}-4 & -1\\ -3 & -2\end{pmatrix}}{5}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{5} & -\frac{1}{5}\\ -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5}\end{pmatrix}.$$

الخطوة الثالثة: نحسب حل الجملة:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & -4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}5\\ -25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{5} & -\frac{1}{5}\\ -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ -25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 7\end{pmatrix}$$

خلاصة: الحل هو:

$$x=1 \qquad y=7$$

٢) **الخطوة الأولى: نحسب محدد الجملة:**

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{vmatrix} = 1-1=0$$

بما أن المحدد يساوي الصفر فليس للجملة حل وحيد ونتوقف عن الحل

٣) **الخطوة الأولى: نحسب محدد الجملة:**

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{vmatrix} = 1-1=0$$

بما أن المحدد يساوي الصفر فليس للجملة حل وحيد ونتوقف عن الحل

مثال ١٢: حل جملة المعادلات الخطية للمثال ١٠ باستخدام المصفوفات.

الحل:

١) الخطوة الأولى: نحسب محدد الجملة:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{matrix} = 6+3+4-9-2-4=-2 \neq 0$$

بما أن المحدد لا يساوي الصفر فإن للجملة حلا وحيدا ونستأنف في الحل.

الخطوة الثانية: نحسب مقلوب مصفوفة المعاملات:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{adj\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}}{-2} = \frac{\left(cof\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}\right)^{t}}{-2} = \frac{\begin{pmatrix} +4 & -1 & +(-5) \\ -0 & +(-1) & -(-1) \\ +(-2) & -(-1) & +1 \end{pmatrix}^{t}}{-2} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{-2},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 2.5 & -0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

الخطوة الثالثة: نحسب حل الجملة:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 2.5 & -0.5 & -0.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

خلاصة: الحل هو:

$$x=1 \qquad y=2 \qquad z=3$$

٢) الخطوة الأولى: نحسب محدد الجملة:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

بما أن المحدد يساوي الصفر فليس للجملة حل وحيد ونتوقف عن الحل

٣) الخطوة الأولى: نحسب محدد الجملة:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

بما أن المحدد يساوي الصفر فليس للجملة حل وحيد ونتوقف عن الحل

تمارين

تمرين ١: حل المعادلات الخطية التالية:

1) $x-(2x+3)=\frac{x+2}{2}$ 2) $-6+2(1-x)=3x-4$ 3) $\frac{2}{x+3}=\frac{4}{1-x}$

4) $-2x+5=\frac{x-4}{2}$ 5) $5-6x+(3x-2)=-4(2+x)$ 6) $\frac{-x+2}{3+x}=-5$

تمرين ٢: حل جمل المعادلات الخطية التالية:

1) $2x-3y=1$
$-x+4y=0$

2) $4x+2y=-8$
$-x-0.5y=2$

3) $-2x+4y=0$
$x-2y=5$

4) $4x+5y=9$
$-x+3y=2$

5) $4x-5y=-9$
$-8x+10y=18$

6) $4x-5y=-9$
$-2x+2.5y=0$

تمرين ٣: حل جمل المعادلات الخطية التالية:

1) $x+y+z=6$
$-x+2y-z=0$
$2x-3y+4z=2$

2) $3x+5y-z=10$
$-x+2y+z=11$
$5x+y-3z=-12$

3) $x-z=12$
$-3x+2y=-3$
$-6x+2y+3z=10$

4) $x+2z=13$
$-y+z=5$
$x-y=0$

5) $-x+2y-z=-2$
$x+15y-3z=11$
$-y+2z=3$

6) $y+z=0$
$x+y-z=10$
$x+2y=-12$